

Matematika középszintű érettségi 2023. május 9. 1. rész

1. Egy akció során az eredetileg 21 000 Ft-os cipő árát 20%-kal csökkentették. Mennyi a cipő csökkentett ára?

Az eredeti cipő árát 20%-kal csökkentették, tehát a csökkentés mértéke $20/100 = 0,2$ (vagy 0,2 vagy 20%). A csökkentett ár meghatározásához a következőképpen számolhatunk:

Csökkentett ár = Eredeti ár - (Csökkentés mértéke * Eredeti ár)

Csökkentett ár = 21 000 Ft - (0,2 * 21 000 Ft) Csökkentett ár = 21 000 Ft - 4 200 Ft

Csökkentett ár = 16 800 Ft

Tehát a cipő csökkentett ára 16 800 Ft.

2. Hány éle van egy hétpontú teljes gráfnak?

Egy teljes gráfban, amelynek n csúcsa van, az élek száma az alábbi képlettel számolható:

$$E = n * (n - 1) / 2$$

A hétpontú teljes gráf esetén, ahol $n = 7$:

$$E = 7 * (7 - 1) / 2 \quad E = 7 * 6 / 2 \quad E = 42 / 2 \quad E = 21$$

Tehát egy hétpontú teljes gráfnak 21 éle van.

3. Az alaphalmaz legyen az egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Az alaphalmaz részhalmazai közül az A halmaz legyen a prímszámok halmaza, a B halmaz pedig legyen a 3-mal osztható számok halmaza.

Elemei felsorolásával adja meg a B és az $A \setminus B$ halmazt!

Az alaphalmaz az egyjegyű pozitív egész számok halmaza: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A B halmaz a 3-mal osztható számok halmaza. Az alaphalmazból a következő számok tartoznak bele: $\{3, 6, 9\}$.

Az B inverzhalmaza azokat az elemeket tartalmazza, amelyek nem szerepelnek a B halmazban. Tehát:

$$B \text{ inverzhalmaza} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

Az A halmaz a prímszámok halmaza. Az alaphalmazból a következő számok tartoznak bele: $\{2, 3, 5, 7\}$.

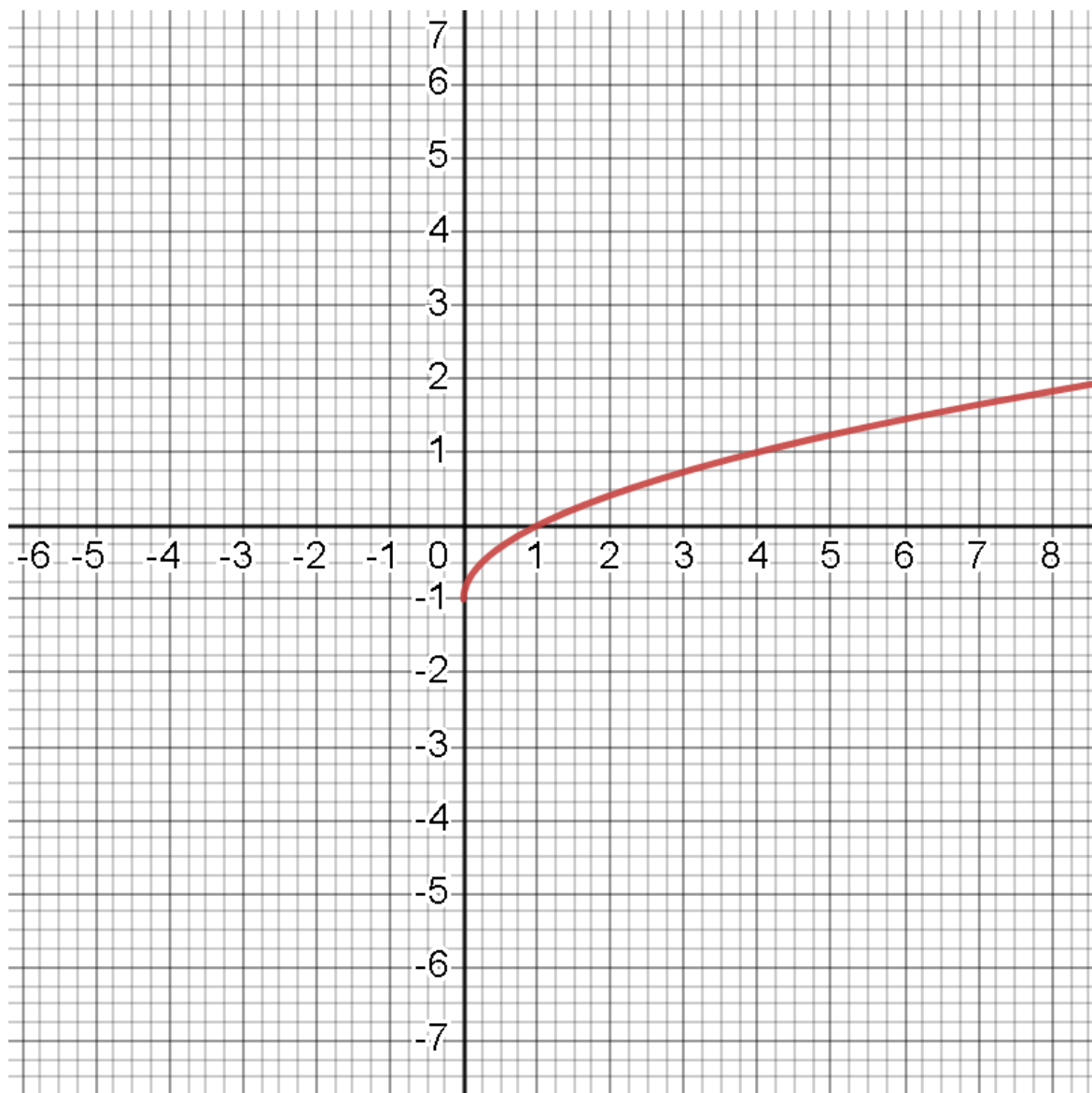
Az $A \setminus B$ halmaz a prímszámok halmaza (A), amelyek nem tartoznak a B halmazba.

Tehát:

$$A \setminus B = \{2, 5, 7\}.$$

A B inverzhalmaza: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Az $A \setminus B$ halmaz: $\{2, 5, 7\}$.

4. Ábrázolja a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $x \rightarrow \sqrt{x} - 1$ függvényt!



5. Adja meg a 420 és az 504 legnagyobb közös osztóját! Megoldását részletezze!

A legnagyobb közös osztót (LKO) meghatározhatjuk több módszerrel, például az osztók vizsgálatával vagy az Euler-féle algoritmussal. Itt részletezni fogom az osztók vizsgálatával történő megoldást.

Először nézzük meg a számok prímtényezős felbontását:

$$420 = 2^2 * 3^1 * 5^1 * 7^1 ; 504 = 2^3 * 3^2 * 7^1$$

A legnagyobb közös osztó meghatározásához azonos prímtényezőkre vonatkozó legkisebb kitevőket kell megtalálnunk. Az LKO ezek szorzata lesz.

A prímtényezős felbontások alapján a következőket kapjuk:

- Az 420 és 504 közös prímtényezői: 2, 3 és 7.
- Az 420-ben a 2 kitevője 2, míg a 504-ben 3, tehát a közös prímtényezők közül a 2 kitevője 2 lesz az LKO-ban.
- Az 420-ben a 3 és 7 kitevője 1, míg a 504-ben 2, tehát a közös prímtényezők közül a 3 és 7 kitevője 1 lesz az LKO-ban.

Az LKO tehát: $2^2 * 3^1 * 7^1 = 84$.

Tehát az 420 és 504 legnagyobb közös osztója 84.

6. Adott az $A(2; 4)$ és a $B(3; -1)$ pont a koordináta-rendszerben. Írja fel az $\overrightarrow{AB}$

vektort a koordinátaival!

$A(2; 4)$ és $B(3; -1)$ pontok adottak a koordináta-rendszerben. Az AB vektor koordinátáit a következőképpen számíthatjuk ki:

$$AB \text{ vektor koordinátái} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Ahol (x_1, y_1) az A pont koordinátái, és (x_2, y_2) a B pont koordinátái.

$$AB \text{ vektor koordinátái} = (3 - 2, -1 - 4) = (1, -5)$$

Tehát az AB vektor koordinátái $(1, -5)$.

7. Egy mértani sorozat második tagja 6, harmadik tagja 9. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az összegét! Megoldását részletezze!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \quad a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = S_n$$

$$a_2=6, \quad a_3=9 \quad \text{tehát } q = a_3/a_2 = 9/6 = 1,5 \quad \text{ebből } a_1 = a_2/q = 6/1,5 = 4$$

$$S_6 = 4 * \frac{1,5^6 - 1}{1,5 - 1} = 4 * \frac{10,39}{0,5} = 83,125$$

8. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek számjegyei különböző páratlan számok?

Az első számjegy lehetőségei: 1, 3, 5, 7, 9 (5 lehetőség) A második számjegy lehetőségei: a maradék 4 szám közül választhatunk (4 lehetőség) A harmadik számjegy lehetőségei: a maradék 3 szám közül választhatunk (3 lehetőség)
Az összes lehetőség száma az első, második és harmadik számjegyekre vonatkozóan:
 $5 * 4 * 3 = 60$

Tehát összesen 60 olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek páratlan és különböző számjegyei vannak.

9. Tekintsük a következő állítást: *Minden út Rómába vezet.*

Az alábbi állítások közül válassza ki azokat, amelyek tagadásai ennek az állításnak!

A: Nincs olyan út, ami Rómába vezet.

B: Van olyan út, amelyik nem Rómába vezet.

C: Semelyik út nem vezet Rómába.

D: Nem minden út vezet Rómába.

Az állítás tagadása tehát a B és D állítások.

10. Adott a $2x + 5y = 19$ egyenletű f egyenes. Adja meg az f egyenes és az $y = 5$ egyenletű egyenes metszéspontjának koordinátáit!

Ahhoz, hogy meghatározzuk az f egyenes és az $y = 5$ egyenes metszéspontjának koordinátáit, megoldhatjuk a két egyenletet együtt. Az első egyenlet:

$$2x + 5y = 19$$

A második egyenlet:

$$y = 5$$

Az $y = 5$ egyenletben az y értéke fixen 5, tehát helyettesíthetjük az f egyenes egyenletébe:

$$2x + 5 \cdot 5 = 19$$

$$2x + 25 = 19$$

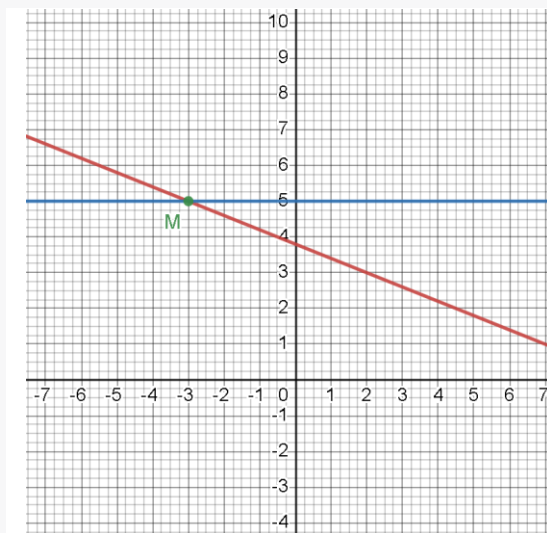
$$2x = 19 - 25$$

$$2x = -6$$

$$x = -6 / 2$$

$$x = -3$$

Tehát az f egyenes és az $y = 5$ egyenes metszéspontjának koordinátái $(-3, 5)$.



11. Számítsa ki az 1989 cm³ térfogatú gömb sugarának hosszát!

Az adott információk alapján $V = 1989 \text{ cm}^3$. Tehát a fenti egyenletet a következőképpen írhatjuk:

$$1989 = (4/3) * \pi * r^3$$

A sugarat kiszámíthatjuk az egyenlet átrendezésével:

$$r^3 = (1989 * 3) / (4 * \pi)$$

$$r^3 = 5967 / (4 * \pi)$$

$$r^3 \approx 475.91$$

Az r^3 értékét kiszámolva:

$$r \approx \sqrt[3]{475.91} \approx 7.83$$

Tehát a gömb sugarának hossza kb. 7,83 cm.

12. Egy kék és egy piros szabályos dobókockával dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a kék kockával nagyobb számot dobunk, mint a pirossal? Válaszát indokolja!

Ahhoz, hogy meghatározzuk a valószínűséget, hogy a kék kockával nagyobb számot dobunk, mint a piros kockával, először meg kell határoznunk a lehetséges dobások számát.

Mind a kék, mind a piros dobókocka szabályos, tehát mindegyiküknek 6 oldala van, amelyek 1-től 6-ig vannak címkézve.

A lehetséges dobások száma mindkét kocka esetében $6 * 6 = 36$, mivel minden kockával 6 különböző eredményt érhetünk el.

A következő lépésben meg kell határoznunk, hogy hány olyan eredmény van, ahol a kék kockával nagyobb számot dobunk, mint a piros kockával. Ezért át kell tekintenünk az összes lehetséges eredményt:

A kék dobókocka értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6 A piros dobókocka értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6

A kék kockával nagyobb számot dobunk, mint a piros, az alábbi eredményeknél:

(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)

Összesen 15 ilyen eredmény van.

Ezért a kék kockával nagyobb számot dobni, mint a piros kockával, a valószínűség az alábbi:

$$P(\text{nagyobb számot dobunk}) = (\text{lehetséges nagyobb eredmények száma}) / (\text{összes lehetséges dobások száma}) = 15 / 36 \approx 0.4167$$

Tehát a kék kockával nagyobb számot dobni, mint a piros, a valószínűsége kb. 0.4167, vagyis körülbelül 41.67%.